

敦煌算经九九表探析

张小虎

九九表，又称九九歌、九因歌，是我国古代数学运算中进行乘除、开方等用的基本运算规则表。对九九表，秦汉典籍多有记载，唐宋间又引申为数学的代称。20世纪初发现于我国甘肃敦煌莫高窟（敦煌研究院编号第17窟）的一批5—10世纪的算经文书中亦有九九表多件。关于敦煌算经文书中的九九表，学术界已有一些相关介绍和论述^①，但多数研究为提要性质或仅就其内容本身论述，而对其所透露的社会信息则少有论及；并且这些研究多为20世纪80—90年代所作，受资料所限，各家所涉敦煌算经文书九九表的件数也很有限。近年来，随着诸多敦煌文献出版的陆续编辑、出版，对敦煌算经文书中的九九表做全面检索、系统专题研究的时机也已基本成熟。^②笔者不揣浅陋，拟在前人基础上，试对

^① 参见许康：《敦煌算书透露的科学与社会信息》，《敦煌研究》1989年1期；华侃：《敦煌古藏文写卷〈乘法九九表〉的初步研究》，《西北民族学院学报》1985年第3期；[比]李倍始：《敦煌千佛洞算书手抄本》，李国豪、张孟闻、曹天钦：《中国科学史探索》中文版，刘祖慰译、杜石然校，上海：上海古籍出版社，1986年，第205—230页；李并成：《从敦煌算经来看我国唐宋时代的初级数学教育》，《数学教学研究》1991第1期；王进玉：《敦煌遗书中的数学史料及其研究》，李迪：《数学史研究文集》，呼和浩特：内蒙古大学出版社，1991年第2辑；王渝生：《敦煌算书》，郭书春：《中国科学技术典籍通汇·数学卷·一》，郑州：河南教育出版社，1993年，第401—420页；刘钝：《九九表》，季羨林：《敦煌学大辞典》，上海：上海辞书出版社，1998年，第601页。

^② 截至2010年，《英藏敦煌文献》、《法藏敦煌西域文献》、《俄藏敦煌文献》、《上海博物馆藏敦煌吐鲁番文献》、《天津艺术博物馆藏敦煌文献》、《北京大学图书馆藏敦煌文献》、《甘肃藏敦煌文献》和《浙藏敦煌文献》等都已出齐，《中国国家图书馆藏敦煌遗书》正在出版（预计出版150册，现已出版127册）。2009年10月，日本武田科学振兴财团、杏雨书屋先期出版了《敦煌秘笈》目录及图录第1册，其余部分以后将陆续出版。经过百年的努力，目前有关敦煌文献的刊布工作基本完成。

敦煌算经文书中的九九表做一较系统的专题论述。不当之处，还请方家指正。

据笔者初步查检，敦煌算经文书中提及九九表者共有12件，它们的编号依次为：

S.19^①、S.930v^②、S.4569^③、S.6167v^④、S.8336v^⑤、P.3349^⑥（此件含九九表两处）、P.2502v^⑦、P.3102v^⑧、P.T.1256^⑨、俄Дх.2145v^⑩、俄Дх.2904^⑪、羽037R（即敦煌226）^⑫。

可见的12件九九表除S.930v、S.4569和P.3349保存完整外，其余均为残表。具体而言，S.4569全，计7行，始“九九八十一”迄“一一如一”，总45句；S.6167v残，9行，存“九九八十一”迄“一九如九”句；

① 中国社会科学院历史所、中国敦煌吐鲁番学会敦煌古文献编辑委员会、英国国家图书馆等：《英藏敦煌文献：汉文佛经以外部分》第1册，成都：四川人民出版社，1990年，第16页。

② 中国社会科学院历史所、中国敦煌吐鲁番学会敦煌古文献编辑委员会、英国国家图书馆等：《英藏敦煌文献：汉文佛经以外部分》第2册，成都：四川人民出版社，1990年，第201—204页。

③ 中国社会科学院历史所、中国敦煌吐鲁番学会敦煌古文献编辑委员会、英国国家图书馆等：《英藏敦煌文献：汉文佛经以外部分》第6册，成都：四川人民出版社，1992年，第138页。

④ 中国社会科学院历史所、中国敦煌吐鲁番学会敦煌古文献编辑委员会、英国国家图书馆等：《英藏敦煌文献：汉文佛经以外部分》第10册，成都：四川人民出版社，1994年，第126—127页。

⑤ 中国社会科学院历史所、中国敦煌吐鲁番学会敦煌古文献编辑委员会、英国国家图书馆等：《英藏敦煌文献：汉文佛经以外部分》第12册，成都：四川人民出版社，1995年，第113页。

⑥ 上海古籍出版社、法国国家图书馆：《法藏敦煌西域文献》第23册，上海：上海古籍出版社，2002年，第277—279页。

⑦ 上海古籍出版社、法国国家图书馆：《法藏敦煌西域文献》第14册，上海：上海古籍出版社，2001年，第356页。

⑧ 上海古籍出版社、法国国家图书馆：《法藏敦煌西域文献》第21册，上海：上海古籍出版社，2002年，第313页。

原件现藏巴黎法国国家图书馆，已收录在1978及1980两年在巴黎出版的由麦克唐纳夫人和今支由郎编辑并加注记的《敦煌吐鲁番文书选集》影印本（单页集装）第一辑中。参见华侃：《敦煌古藏文写卷〈乘法九九表〉的初步研究》，《西北民族学院学报》1985年第3期。

俄罗斯科学院东方研究所圣彼得堡分所、俄罗斯科学出版社、上海古籍出版社编：《俄藏敦煌文献》第9册，上海：上海古籍出版社，1998年，第47页。

⑪ 俄罗斯科学院东方研究所圣彼得堡分所、俄罗斯科学出版社、上海古籍出版社编：《俄藏敦煌文献》第10册，上海：上海古籍出版社，2006年，第119页。

⑫ 参见〔日〕武田科学振兴财团杏雨书屋：《敦煌秘笈》影片册1，2009年，第248页。笔者所依据的是于2010年10月从敦煌研究院文献所得到的《敦煌秘笈》第1册电子扫描图录本，在此衷心向敦煌研究院文献所表示感谢。

S.8336v残，倒写，计5行，存“六九五十四、五九四十五、四九□□□、□□六十三、七八五十六、六□□□□、□□□十四、二八一十六、一八如□、□七三十五、四七二□□、□□□七、六六三十六、五□□□□”句；P.2502v残，9行，存“九九八十一”迄“一三如三”句。P.3349、S.19同属一书，可相互校补。S.19存“九九八十一”迄“七八五十六”句，所缺句可依P.3349补全；羽037R残，存“五八四十”迄“二四如八”句。值得注意的是S.19、P.3349和羽037R每句口诀后别列“自相乘”、“分之”句（部分后缺“分之”句），如“九九八十一，自相乘得六千五百六十一，九人分之得七百二十九”、“二六十二，自相乘得一百卅四，二人分之得七十二”等，这是我国其他算经所不载的。在被乘数、乘数相同句则记“某某一”，其后用“凡总得”句小结口诀内部每段之和，如“九九一，凡总得三百九十六，自相乘得一十五万六千八百一十六”、“八八一，凡总得二百八十，自相乘得七万八千四百”等，这也是一种独创。许康认为S.19书写于唐或五代，写于五代的可能性更大^①。P.3349背面为学生习字书，残存10余行，多系常用字，如吾、及、在、也等。九九表与习字书同出一件，表明其可能是用于学校或家塾教育的初级数学课本。S.930v全，自“九九八一”迄“一一如一”，此表最重要的特点是：每句口诀的乘积都用算筹记数法表示于后；被乘数、乘数相同句后出现“直下”，其他各句后出现“通前”，记各句乘积之和，如“九九八一点直下八十一”、“七八五十六三T通前一百廿十文”等。表末则记有“都计得一千一百五十五文”句。此表抄写于道经纸背，下接《河西都僧统悟真百岁书并序》，则此九九表抄写年代当在晚唐以后。俄Дх.2904残，3行，存“□廿、三五□□、□□十二、二四如八、一四□□、□□如四、一二如二”句。俄Дх.2145v残，7行，存“九九八十一”迄“一三如三”句。P.3102v分四部分，第四部分倒写，卷末存“贰玖拾捌、叁玖贰拾柒、肆玖叁拾陆、伍玖肆拾伍、陆玖伍拾肆、柒玖陆拾叁、捌玖柒拾贰、玖玖捌拾壹”8句，系大写数字书写，此文书的正面为《开蒙要训》。《开蒙要训》是唐、五代时在敦煌地区被广为传抄的启蒙读物，而此九九表抄写于《开蒙要训》的背

^① 许康：《敦煌算书透露的科学与社会信息》，《敦煌研究》1989年第1期。

面，当亦为唐、五代时作。P.T.1256是一篇用藏文音译汉字的乘法九九表，原文全为藏文，无标题，未署抄写人姓名，横书8行，从“九九八十一”迄“一一如一”句。综上所述，12件九九表均系唐宋写本，全用毛笔抄写，其字体多为自由体行书，亦有少量为草书，书写水平大多不高。它们是我国现存最早的纸卷算书九九表。通过对敦煌算经中12件九九表的粗略考察，笔者注意到九九表中可关注者有以下数端：

一、敦煌算经九九表中若干字词的训释

S.930v九九表末记有“都计得一千一百五十五文”句，表中多句后亦出现“文”字，如“通前四百五文”、“前一百廿十文”等。“都”、“文”二字当做何解？若将S.930v九九表中每句口诀得数依次相加，即“ $81+72+63+\dots+4+2+1$ ”的总和恰为一千一百五十五，这正与S.930v九九表末记数相符。考诸秦汉简牍，我们发现里耶秦简九九表末、敦煌汉简九九表末均记有同类语句。如里耶秦简九九表末记有“凡千一百一十三字”^①句；敦煌汉简2170号九九残表末也记“大凡千一百一十三”^②句，将表中每句口诀得数依次相加亦合表末所记之数。由此我们不难看出“都”、“凡”和“大凡”都应是“总”的意思。然“文”字不仅见于S.930v九九表末，尚见于表中另外七处，而大多数口诀后则多省“文”字，这又该作何解？我们发现S.930v九九表每句口诀后都用筹算表示出其乘积得数，而“文”字又每置于筹算结果后；且表中八个“文”的使用又呈现出很大随机性，毫无规律可循，去掉该字亦丝毫不影响阅读。因此我们有理由相信：“文”当是一种表示数量的筹算单位。考之中国数学史，早在春秋战国时，筹算已普遍应用，九九表也已相当普及，故敦煌算经中的九九表多省“文”字亦不足为奇了。S.930v九九表于被乘数、乘数相同句后每有“直下”一词，被乘数、乘数不同句后每见“通前”二字。据文意来看，“直下”大约为“从这里开始

① 湖南省文物考古研究所、湘西土家族苗族自治州文物处、龙山县文物管理所：《湖南龙山里耶战国—秦代古城一号井发掘简报》，《文物》2003年第1期。

② 罗振玉、王国维：《流沙坠简》，北京：中华书局，1993年，第92页。

计算”，似还起到给九九表“分段”的作用；“通前”则无疑应是指各句乘积的递相累加。P.3349、S.19九九表每句后记有将各句得数分为九类、次第相加的详细过程，表末则记有各口诀乘后所得数字相加的总和，其中出现了“自相乘”、“分之”二词。“自相乘”的数学概念即现代数学名词“平方”，“分之”则是现代数学中的“被除”。这种含“直下”、“通前”、“自相乘”和“分之”的九九表正是在中原算经中少见的数学模式。敦煌算经九九表每句下附筹算数字，并将逐句得数累加，又进一步对45句乘积分别作自乘和除法，可以认为这是对筹算初学者的基本训练，颇有助于初学者提高乘、除和加法的运算能力；这还可能与当地民众生活方式有关，当他们进行货物交易、土地丈量及买卖时，这些“通前”、“自相乘”和“分之”所列举的值可能就常被用来查检。

二、敦煌算经九九表中的记数符号

算经S.930v、P.3349九九表在每句口诀后依算筹形式别列数码，可以看出这些记数符号是作为正文出现的，抄写者把它作为文字的辅助部分以使数字更加形象。所见其数码分纵横两式：“一”用一横或一竖来表示；“二”用并列的两横或两竖表示；“三”、“四”和“五”依次类推；“六”记作“T”或“⊥”，即用上（下）面的一横代表五，横下（上）的一竖代表“一”；“七”、“八”、“九”则依“六”类推。还可以看到，这些筹算数码中无“零”的符号。中间有“0”的数字，用空位来表示“0”，如“405”被表示成“Ⅲ ⅢⅢ”；若末尾有“0”的数字，则根据“凡算之法，先识其位”，通过定位来表示，如“40”被表示成“三 ”。关于筹算的方法，《孙子算经》云：“凡算之法，先识其位。一纵十横、百立千僵、千十相望、万百相当。”^①《夏侯阳算经》又补充了“满六以上，五在上方；六不积算，五不单张”^②。“凡算之

① 佚名：《孙子算经》，甄鸾、王孝通、韩延等，钱宝琮校点：《算经十书》，北京：中华书局，1963年，第282页。

②（唐）韩延：《夏侯阳算经：卷上》，甄鸾、王孝通、韩延等，钱宝琮校点：《算经十书》，北京：中华书局，1963年，第558页。

法，先识其位”阐明了数位在记数中的重要意义；后面几句则阐明筹算记数的规则。敦煌算经九九表中的筹算数码可以说是《孙子算经》和《夏侯阳算经》记数法的具体表现。而表中数字记数与筹算记数同时使用，则可能是为便于更多的人认识文书的内容，这反映出唐、五代敦煌地区记数符号的使用已较广泛，但可能也反映出敦煌当地普通百姓文化水平相对较低的社会现实。这些九九歌可能还具有教育意义，杨秀清推论敦煌学生学习的价值取向当受科举制影响^①。因此，敦煌算经九九表出现筹算形式应属合宜的社会情形。

然而使用计数符号并非敦煌算经九九表所独有。在黑水城出土的西夏借粮契约和元代赋税文书中，也有以符号来记录粮食数量和种类的例子。值得注意的是黑水城文书中还出现圆圈、三角和十字这些独有的符号。而在北宋时与敦煌算经九九表不同的是“五”的符号。《潜虚》中用“×”代替敦煌算经中笔画较多、难辨识和读写且易于出错的“𠄎”^②。虽然它们在符号的具体含义上呈现出各自不同的时代特征，但在一定程度上都体现了与敦煌算经中的记数符号的相关性。另外，P.T.1256中也有关于记数符号的文字记载和具体应用。P.T.1256从藏文书法判断当写于吐蕃时期^③。可见吐蕃时期九九表已传入藏族，这也反映出藏、汉民族思想文化交流之早和渊源之深。

三、敦煌算经九九表中的一系列大写数字

敦煌算经所见九九表大部分系笔画简单的小写数字书写，而P.3102v卷末出现一件用“貳”、“叁”等大写数字书写的九九表。这种大写数字书写的九九表并不只见于敦煌算经，也见于吐鲁番出土文书。如60TAM316: 08/1 (b)《古抄本乘法诀》即为一大写数字书写的九九表

① 杨秀清：《浅谈唐、宋时期敦煌地区的学生生活：以学郎诗和学郎题记为中心》，《敦煌研究》1999年第4期。

② (宋)司马光：《潜虚》，《丛书集成新编》第24册，台北：新文丰出版公司，1986年，第317页。

③ 华侃：《敦煌古藏文写卷〈乘法九九表〉的初步研究》，《西北民族学院学报》1985年第3期。

①。原表大部分残缺，仅存6句，其中就有“拾”、“究”（玖）、“拔”（捌）、“柒”、“法”（陆）、“伍”、“叁”、“贰”、和“壹”九个大写数字。考之敦煌和吐鲁番出土的唐代文书，可看出凡会计账目、借贷契约的钱物数量、规格乃至期限等事项，都已普遍使用大写数字记录。如敦煌文书P.3348v《唐天宝四载（745年）河西豆卢军和余会计牒》：“……三载冬季交余纳，准估计当钱壹阡伍伯柒拾伍贯玖伯伍文。伍阡肆伯伍硕捌斗叁胜柒合粟，斗估廿七文，计壹阡肆伯伍拾玖贯伍伯柒拾陆文。……”^②吐鲁番文书73TAM506：4/12《唐蒋玄其等领钱练抄》：“（前缺）大练贰伯叁拾伍疋贰丈肆尺充药直。……”^③借贷契约也举两例，如敦煌文书P.3453《辛丑年贾彦昌贷生绢契》：“辛丑年十月廿五日，贾彦昌缘往西州充使，遂于龙兴寺上座心善面上贷生绢壹疋，长叁拾柒尺贰寸，幅壹尺捌寸。又贷帛花绵绫壹疋，长贰丈叁尺陆寸，幅壹尺玖寸半。自贷后，西州回日还，利头好立机两疋，各长贰丈伍尺。……本物限入后壹月还纳。”^④吐鲁番文书64TAM4：34《唐龙朔元年（661年）龙惠奴举练契》：“龙朔元年八月廿三日，安西乡人龙惠奴于崇化乡人右（左）懂惠边举取练叁拾疋，月别生利练肆疋。其利若出月不还，月别罚练壹疋入左。”^⑤可以看到在上述出土的唐代文书中从“壹”到“拾”的大写数字一应俱全。由此可见，经过人们长期研究，到了唐朝，在约定俗成的基础上，已经形成了一套完整的用“壹、贰、叁、肆、伍、陆、柒、捌、玖、拾”来表示“一、二、三、四、五、六、七、八、九、十”意义的大写数字。以往多认为开始使用“壹、贰、叁、肆、伍、陆、柒、捌、玖、拾”等商业用字始于宋，其实不然。《诗经》已以“壹”代“一”，《孟子》用“贰”代“二”，《考工记》用

① 国家文物局古文献研究室、新疆维吾尔自治区博物馆、武汉大学历史系编：《吐鲁番出土文书》第3册，北京：文物出版社，1981年，第366页。

② 唐耕耦、陆宏基：《敦煌社会经济文献真迹释录》第一辑，北京：书目文献出版社，1986年，第426—427页。

③ 国家文物局古文献研究室、新疆维吾尔自治区博物馆、武汉大学历史系编，《吐鲁番出土文书》第10册，北京：文物出版社，1991年，第29页。

④ 中国科学院历史研究所资料室：《敦煌资料》第一辑，北京：中华书局，1961年，第371页。

⑤ 国家文物局古文献研究室、新疆维吾尔自治区博物馆、武汉大学历史系编：《吐鲁番出土文书》第6册，北京：文物出版社，1985年，第408页。

“叁”代“三”，《墨子》用“漆”代“七”，全面使用则是在唐代。唐代因官私手工业和商业的发展需要，小写数字，笔画简单、易于涂改，故多改为大写。迨入宋代，官府文书用大写数字记数已成定制。这种大写的商业数字今天仍被广泛使用于金融商业中，被称为“会计体”。

吐鲁番地区古称高昌，唐时称为西州，敦煌与吐鲁番之间的交往由来已久。著名的大海道即为连接二地间的丝路故道，在历史上曾起过非常重要的作用。S.0113《西凉建初十二年正月敦煌郡敦煌县西宕乡高昌里籍》残卷出现“高昌里”，李并成认为其位于敦煌绿洲的最西北部，由此向西北穿过约五百余公里的戈壁、沙滩即达高昌。^①P.2009《西州图经残卷》记：“大海道，右道出柳中县界，东南向沙州一千三百六十里，常流沙，人行迷误，有泉井咸苦，无草，行旅负水担粮，履践沙石，往来困弊。”^②唐西州柳中县即高昌郡田地县（治所在今吐鲁番市东南约50公里的鄯善县鲁可沁），沙州即敦煌。往来敦煌、吐鲁番两地，其路途虽艰险困苦，但大海道较为顺直、行程最短。迄唐、五代时期，大海道沿用未辍，为西州东通中原必经要路。敦煌和吐鲁番文书中都发现这种用大写数字抄写的九九表，无疑当是唐、五代敦煌、吐鲁番地区经济繁荣、商业贸易兴盛和人员往来交流不断的时代烙印。

四、敦煌算经九九表的句数和排列顺序

钱宝琮指出：“现在的乘法口诀是从‘一一如一’起到‘九九八十一’止，共四十五句。古代的乘法口诀是从‘九九八十一’起到‘二二如四’止，只有三十六句。”^③但敦煌算经九九表却与此说不符。可以看出，敦煌算经九九表的句数有45句（如S.4569、P.3349等）和36句（如S.19等）两种。45句者从“九九八十一”到“一一如一”句，与《孙子算经》中的九九表规格相同；36句者则缺“一九如九”到“一一如一”九句。事实上目前所见我国古代的九九表除敦煌算经有45句、36句外，

① 李并成：《西凉敦煌户籍残卷（S.0113）若干问题新探》，《敦煌研究》2004年第4期。

② 唐耕耦、陆宏基：《敦煌社会经济文献真迹释录》第一辑，北京：书目文献出版社，1986年，第54页。

③ 钱宝琮：《中国数学史》，北京：科学出版社，1964年，第10页。

尚有38句者。2002年出土于湖南龙山里耶的秦简九九表保存完整，其句数既非36句，也非45句，而是38句。里耶秦简九九表中亦缺“一九如九”到“一一如一”九句；但多了“一一而二”、“二半而一”两句，颇具特色。王焕林认为“一一而二”句当作“ $1+1=2$ ”解，“二半而一”应视为分数运算。^①可以看到，除P.3102v外，其余各九九表（残缺者据补全后）首句均起于“九九八十一”，依次则被乘数渐次变小，止于二，有的则止于一；再为八八相乘，依次类推，止于“一一如一”或“二二如四”。P.3102v则由小到大依次排列，与其他九九表排列顺序正好相反。还可看出，以上各表均为“小九九”，因为表中有“八九七十二”而无“九八七十二”；有“七九六十三”而无“九七六十三”，余句类推。考诸出土秦汉简牍可知：除里耶秦简九九表外，尚有张家界古人堤汉简、敦煌汉简、居延汉简、居延新简和楼兰文书九九表。综合考察以上各九九表则可看出：唐宋以前之九九表总体上具有比较稳定的内容与顺序；同时一份完整的九九表应该还有各句口诀得数依次相加所得之和。

以上粗略讨论了敦煌算经九九表的特征及其透露出的社会信息。这些富有特色的九九表从一个侧面为我们管窥唐、五代和宋初敦煌地区的经济、文化和社会提供了有益的信息。

^① 王焕林：《里耶秦简九九表初探》，《吉首大学学报》2006年第1期。